ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 141 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25

УДК 519.622

Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса с производной Римана–Лиувилля

Михаил Валерьянович БУЛАТОВ, Татьяна Сергеевна ИНДУЦКАЯ

ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук»

664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

Аннотация. В статье исследованы линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$. В отличии от ранее известных результатов, авторы рассматривают случай, когда матрица, стоящая перед операцией дробного дифференцирования, является вырожденной. Задачи в такой постановке называются дифференциально-алгебраическими уравнениями дробного порядка. Подчеркнуты принципиальные отличия таких систем от классических задач дробного дифференцирования и интегрирования, а именно, они могут иметь бесконечное множество решений, или решение исходной задачи зависит от высокой дробной производной правой части. Приведены соответствующие примеры. Авторы переходят к иной, эквивалентной постановке задачи, а именно, переписывают ее в виде системы линейных интегральных уравнений типа Абеля (со слабой особенностью). Такой прием позволяет применять для исследования на предмет существования и единственности решения исходной задачи аппарат регулярных матричных пучков. Используя данный результат, авторы приводят достаточные условия существования единственного решения рассматриваемого класса задач. Далее, предложен алгоритм численного решения таких уравнений. Этот метод основан на методе интегрирования произведений и квадратурной формуле правых прямоугольников. Приведены расчеты и графики погрешностей предложенного метода для различных показателей дробного дифференцирования и различных индексов исходных матричных пучков.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, дробная производная Римана–Лиувилля, индекс матричного пучка, интегро-алгебраические уравнения типа Абеля, метод интегрирования произведений

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00173, https://rscf.ru/project/22-11-00173/).

Для цитирования: *Булатов М.В., Индуцкая Т.С.* Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса с производной Римана–Лиувилля // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 13–25. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25.

SCIENTIFIC ARTICLES

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25

Numerical solution of differential-algebraic equations of arbitrary index with Riemann–Liouville derivative

Mihail V. BULATOV, Tatiana S. INDUTSKAYA

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the RAS
134 Lermontova St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. In the article, linear systems of ordinary differential equations of fractional order $\alpha \in (0,1)$ are investigated. In contrast to previously known results, the authors consider the case when the matrix before the fractional differentiation operation is degenerate. Problems in such a formulation are called differential-algebraic equations of fractional order. The fundamental differences of such systems from the classical problems of fractional differentiation and integration are emphasized, namely, the systems under consideration can have an infinite number of solutions, or a solution of the original problem depends on the high fractional derivative of the right-hand side. Corresponding examples are given. The authors pass to a different, equivalent formulation of the problem, namely, they rewrite it in the form of a system of linear integral equations of the Abel type (with a weak singularity). This technique allows one to use the apparatus of regular matrix bundles to investigate the existence and uniqueness of the original problem. Using this result, the authors give sufficient conditions for the existence of a unique solution to the class of problems under consideration. Further, an algorithm for the numerical solution of such equations is proposed. The method is based on the product integration method and the quadrature formula of right rectangles. Calculations and graphs of the errors of the proposed method for various fractional differentiation exponents and various indices of the initial matrix bundles are presented.

Keywords: differential-algebraic equations, Riemann–Liouville fractional derivative, matrix bundle index, Abel-type integro-algebraic equations, product integration method

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00173, https://rscf.ru/en/project/22-11-00173/).

Mathematics Subject Classification: 65L80.

For citation: Bulatov M.V., Indutskaya T.S. Numerical solution of differential-algebraic equations of arbitrary index with Riemann–Liouville derivative. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 13–25. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Математические модели, использующие аппарат дробного дифференцирования, описывают различные процессы в гидродинамике [1, гл. 3], наследственной механике сплошных сред [1, § 16.3], применяются при моделировании тепломассопереноса [2, гл. 14], турбулентности [2, гл. 18], полупроводников [2, гл. 16] и др. Для описания соответствующих процессов и явлений используют дифференциальные уравнения дробного порядка. Систематизации исследований в этой области посвящено множество работ, следует отметить монографии [3, § 2], [4, § 2.1], использовавшиеся при подготовке данной статьи, в которых представлена обширная библиография по данной тематике.

Данная работа посвящена исследованию и созданию численного метода решения системы дифференциальных уравнений вида

$$D^{\alpha}\left(Au(t)\right)+Bu(t)=f(t),\quad t\in[0,1],$$

здесь D^{α} — оператор дробного дифференцирования порядка $0<\alpha<1$, A,B — заданные $(n\times n)$ матрицы, $f(t)$ и $u(t)$ — заданная и искомая n-мерные функции. В настоящей статье рассмотрим случай, когда ненулевая матрица A удовлетворяет условию

$$\det A=0.$$

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей перед главной частью принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). По аналогии, уравнения, содержащие дробную производную, будем называть ДАУ дробного порядка.

В настоящее время для классических линейных ДАУ первого порядка и отдельных классов ДАУ второго порядка разработаны и обоснованы численные методы. В монографии Ю. Е. Бояринцева 1980 г. на основе аппарата обобщенных обратных матриц [5, гл. 1] исследованы различные постановки ДАУ первого порядка и их решения, получены результаты о управляемости и наблюдаемости таких уравнений [5, гл. 7]. В монографии [6] приведены одни их ключевых результатов качественной теории, в том числе, понятие левого регуляризирующего оператора (см. [6, гл. 3]), освещены проблемы численного решения ДАУ (см. [6, гл. 5]). Что касается ДАУ второго порядка, то отметим работу [7], где для их исследования используется техника проекторов.

Перед изложением основного материала приведем известные результаты, которые будут использованы в дальнейшем.

1. Основные понятия

В этом пункте изложены основные понятия теории дробного интегро-дифференцирования, необходимые для изложения.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [3, с. 42]) Пусть функция $f(t)$ такова, что $\int\limits_0^T |f(s)|ds<\infty$. Интеграл

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds,\quad t\in[0,T],$$

при $\alpha>0$ называют левосторонним интегралом Римана–Лиувилля дробного порядка α (здесь $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция).

Утверждение 1.1. *Пусть* $f(t) \in C_{[0,T]}$, *тогда при любом* $\alpha > 0$ *выполняется* $I^{\alpha} f(t) \in C_{[0,T]}$.

Доказательство. Так как $f(t) \in C_{[0,T]}$, существует $\hat{f} = \max\limits_{t\in[0,T]} |f(t)|$. Определим на множестве $\Delta = \big\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t \le T,\ 0 \le s \le t\big\}$ функцию $\varphi(t,s) = f(t-s)$. В силу данного определения функция $\varphi(t,s)$ непрерывна и, вследствие компактности множества $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, эта функция равномерно непрерывна. Поэтому справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (t_0, s) \in \Delta \quad \forall t \in [s, T] \\ \Big(|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(t-s) - f(t_0 - s)| < \frac{\epsilon\,\Gamma(\alpha+1)}{2T^{\alpha}} \Big),\end{gathered}$$

Определим на отрезке $[0,T]$ степенную функцию $\mu(t) = t^{\alpha}$. Так как $\alpha > 0$, эта функция непрерывна и равномерно непрерывна на заданном отрезке. Таким образом, справедливы соотношения

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall t_0, t \in [0,T] \quad \Big(|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow\ |t^{\alpha} - t_0^{\alpha}| < \frac{\epsilon\,\Gamma(\alpha+1)}{2\hat{f}} \Big).$$

Теперь покажем непрерывность функции $I^{\alpha} f(t)$ в произвольной точке $t_0 \in [0,T]$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Для любого $t \in [0,T]$ такого, что $|t - t_0| < \delta$, имеем

$$\begin{aligned}
&\big|I^{\alpha} f(t) - I^{\alpha} f(t_0)\big| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds - \int\limits_0^{t_0} (t_0 - s)^{\alpha-1} f(s) ds \Big| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int\limits_0^t s^{\alpha-1} f(t-s) ds - \int\limits_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t_0 - s) ds \Big| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int\limits_0^t s^{\alpha-1} f(t-s) ds - \int\limits_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t-s) ds + \int\limits_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t-s) ds - \int\limits_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t_0 - s) ds \Big| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(\Big| \int\limits_{t_0}^t s^{\alpha-1} \big|f(t-s)\big| ds \Big| + \int\limits_0^{t_0} s^{\alpha-1} \big|f(t-s) - f(t_0 - s)\big| ds \Big) \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(\frac{\hat{f}}{\alpha} \big|t^{\alpha} - t_0^{\alpha}\big| + \int\limits_0^{t_0} s^{\alpha-1} \big|f(t-s) - f(t_0 - s)\big| ds \Big) \\
&< \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\, \hat{f}\, \frac{\epsilon\,\Gamma(\alpha+1)}{2\hat{f}} + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\epsilon\,\Gamma(\alpha+1)}{2T^{\alpha}} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, установлено, что $I^{\alpha} f(t) \in C_{[0,T]}$. □

Операция дробного дифференцирования вводится как операция обратная дробному интегрированию.

Определение 1.2. (см. [3, с. 43]) Для функции $f(t)$, заданной на отрезке $[0;T]$, левосторонней производной Римана–Лиувилля дробного порядка $0<\alpha<1$ называется оператор вида

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{d}{dt}I^{\,1-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}f(s)ds.$$

Известно (см. [3, с. 46]), что если $f(t)\in C^1_{[0,T]}$, то справедливо равенство

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(0)+I^{\,1-\alpha}f'(t).$$

Утверждение 1.2. *Для того, чтобы* $\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k}f(t)\in C_{[0,T]}$, *достаточно выполнения условий*

$$f(t)\in C^{[k\alpha]+1}_{[0,T]}\quad \text{и}\quad f^{(i)}(0)=0,\quad i=0,\cdots,[k\alpha]. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть условия (1.1) выполнены. Имеем

$$\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k}f(t)=\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-1}\frac{d}{dt}I^{\,1-\alpha}f(t)=\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-1}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}f(s)ds.$$

Полученный здесь интеграл вычислим по частям, полагая $u=f(s)$, $du=f'(s)ds$ и $dv=(t-s)^{-\alpha}$, $v=-\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, таким образом, получим

$$\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k}f(t)=\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-1}\frac{d}{dt}\Big(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}f(0)+I^{\,2-\alpha}f'(t)\Big).$$

Проинтегрировав правую часть по частям еще $[k\alpha]$ раз, преобразуем ее к виду

$$\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-1}\frac{d}{dt}\Big(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}f(0)+\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}f'(0)+\cdots+\frac{t^{[k\alpha]+1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}f^{([k\alpha])}(0)+I^{\,[k\alpha]+2-\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t)\Big).$$

Учитывая соотношения (1.1), получим

$$\begin{aligned}&\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-1}\frac{d}{dt}I^{\,[k\alpha]+2-\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t)=\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-1}I^{\,[k\alpha]+1-\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t)\\&=\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-2}\frac{d}{dt}I^{\,1-\alpha}I^{\,[k\alpha]+1-\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t)=\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-2}\frac{d}{dt}I^{\,[k\alpha]+2-2\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t)\\&=\underbrace{D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{k-2}I^{\,[k\alpha]+1-2\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t)=\cdots=I^{\,[k\alpha]+1-k\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t).\end{aligned}$$

Здесь последнее выражение получено при помощи последовательного внесения производной под знак интеграла и применения полугруппового свойства интеграла Римана–Лиувилля (см. [3, с. 42]). Остается заметить, что так как $[k\alpha]+1-k\alpha>0$ и $f^{([k\alpha]+1)}(t)\in C_{[0,T]}$, в силу утверждения 1.1, выполнено $I^{\,[k\alpha]+1-k\alpha}f^{([k\alpha]+1)}(t)\in C_{[0,T]}$. □

Далее приведем известные факты из теории матричных пучков.

Определение 1.3. (см. [8, с. 331]) Пусть заданы матрицы A и B размера $m\times n$. *Пучком матриц* или *матричным пучком* называют сумму $\lambda A+B$, где λ — скалярный параметр.

Определение 1.4. (см. [8, с. 332]) Если $m=n$ и $\det(\lambda A+B)\not\equiv 0$, то пучок матриц $\lambda A+B$ называется *регулярным*.

Определение 1.5. (см. [5, § 11]) Пусть $\det(\lambda A+B)\neq 0$ для некоторого значения λ. *Индексом матрицы* $C=(\lambda A+B)^{-1}A$ называют минимальное значение r, при котором

$$\operatorname{rank} C^{r+1}=\operatorname{rank} C^{r}.$$

Такое значение r не зависит от выбора числа λ, поэтому его также называют *индексом регулярного матричного пучка* $\lambda A+B$.

Фундаментальную роль при исследовании и разработке численных методов решения начальной задачи для ДАУ играет следующий результат.

Теорема 1.1. (см. [8, с. 334]) Пусть $\lambda A+B$ — регулярный пучок матриц, тогда существуют невырожденные матрицы P и Q такие что

$$P(\lambda A+B)Q=\lambda\begin{pmatrix}\mathbb{E}_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & N_{r_1} & \cdots & \mathbb{O}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & N_{r_p}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}J_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{E}_{r_1} & \cdots & \mathbb{O}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{E}_{r_p}\end{pmatrix},$$

где $\mathbb{E}$, $\mathbb{O}$ — единичная и нулевая матрица соответствующих размерностей, J — матрица размерности $(d\times d)$, имеющая нормальную жорданову форму, N_{r_i} — матрица размерности $(r_i\times r_i)$, имеющая вид

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

причем $d+r_1+r_2+\cdots+r_p=n$, $d=\deg(\det(\lambda A+B))$, $\max\limits_{i=1,\cdots,p} r_i=r$, здесь r — индекс матричного пучка $\lambda A+B$.

В следующем параграфе рассмотрим ДАУ с дробной производной Римана–Лиувилля.

2. Постановка задачи и условия разрешимости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$D^{\alpha}\left(Au(t)\right)+Bu(t)=f(t),\ \ t\in[0,1], \tag{2.1}$$

с производной Римана–Лиувилля дробного порядка $\alpha\in(0,1)$, где A,B — постоянные $(n\times n)$ матрицы, $f(t)$ и $u(t)$ — известная и искомая n-мерные вектор-функции.

Для уравнения (2.1) зададим начальное условие

$$D^{\alpha-1}\left(Au(t)\right)\Big|_{t\to+0} = u_0, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Задача (2.1), (2.2) традиционно называется задачей типа Коши (см., например, [4, § 42]).

Определение 2.1. Под *решением* поставленной задачи будем понимать непрерывную вектор-функцию $u = u(t)$, которая обращает в тождество уравнение (2.1) и удовлетворяет начальным условиям (2.2).

Утверждение 2.1. *Пусть для задачи (2.1), (2.2) выполняются условия*

1. *пучок $\lambda A + B$ является регулярным, и его индекс равен r;*
2. $f(t) \in C^{[(r-1)\alpha]+1}_{[0,1]}, \quad f^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \cdots, [(r-1)\alpha]$;
3. $u_0 = 0$.

Тогда задача (2.1), (2.2) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. Обратим оператор дробной производной в уравнении (2.1), тогда задача типа Коши примет вид эквивалентного интегро-алгебраического уравнения типа Абеля, в том смысле, что если функция $u = u(t)$ является решением одной из этих задач, то она является решением и другой [4, § 3.2.1],

$$Au(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds = I^\alpha f(t) + \frac{u_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

а из третьего условия утверждения 2.1 получим

$$Au(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds. \tag{2.3}$$

Согласно первому условию утверждения 2.1, матричный пучок $\lambda A + B$ является регулярным, т. е. справедлива теорема 1.1. Умножим интегральное представление (2.3) на матрицу P и проведем замену $u(t) = Qy(t)$, где P и Q те же матрицы, что и в теореме 1.1, будем иметь

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N_{r_1} & \cdots & \mathbb{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & N_{r_p} \end{pmatrix} y(t) + I^\alpha \begin{pmatrix} J_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{E}_{r_1} & \cdots & \mathbb{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{E}_{r_p} \end{pmatrix} y(t) = I^\alpha g(t),$$

где $g(t) = Pf(t)$. Из второго условия утверждения 2.1 вытекает, что элементы функции стоящей в правой части $I^\alpha g(t)$ принадлежат классу непрерывных функций (см. утверждение 1.1).

Итак, систему (2.3) мы разделили на системы вида

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_d y_d(t) + I^\alpha\left(J_d y_d(t)\right) = I^\alpha g_d(t), \\ &N_{r_1} y_{r_1}(t) + I^\alpha\left(\mathbb{E}_{r_1} y_{r_1}(t)\right) = I^\alpha g_{r_1}(t), \\ &\cdots \\ &N_{r_p} y_{r_p}(t) + I^\alpha\left(\mathbb{E}_{r_p} y_{r_p}(t)\right) = I^\alpha g_{r_p}(t), \end{aligned}$$

где $y(t)=\begin{pmatrix} y_d(t)\\ y_{r_1}(t)\\ \cdots\\ y_{r_p}(t)\end{pmatrix}$, $g(t)=\begin{pmatrix} g_d(t)\\ g_{r_1}(t)\\ \cdots\\ g_{r_p}(t)\end{pmatrix}$.

Первая из них является системой интегральных уравнений Абеля второго рода, которая при $I^\alpha g_d(t)\in C_{[0,1]}$ имеет единственное непрерывное решение (см. [9, § 9.3]).

Подробнее рассмотрим оставшиеся системы.

$$\begin{gathered} y_2(t)+I^\alpha y_1(t)=I^\alpha g_1(t)\\ y_3(t)+I^\alpha y_2(t)=I^\alpha g_2(t)\\ \cdots\\ I^\alpha y_k(t)=I^\alpha g_k(t), \end{gathered}$$

где $k\in\{r_1,r_2,\cdots,r_p\}$. По аналогии с ДАУ первого порядка с постоянными матричными коэффициентами [5, § 6-8], решение таких систем будем находить последовательным дифференцированием порядка α и подстановкой в предыдущее, начиная с последнего. Таким образом, решение таких систем будет иметь вид

$$\begin{gathered} y_1(t)=g_1(t)+\sum_{i=2}^{k}(-1)^{i-1}\underbrace{D^\alpha\cdots D^\alpha}_{i-1}g_i(t)\\ \cdots\\ y_{k-2}(t)=g_{k-2}(t)-D^\alpha g_{k-1}(t)+D^\alpha D^\alpha g_k(t)\\ y_{k-1}(t)=g_{k-1}(t)-D^\alpha g_k(t)\\ y_k(t)=g_k(t), \end{gathered}$$

где $k\in\{r_1,r_2,\cdots,r_p\}$. Полученные выражения при выполнении второго условия утверждения 2.1 являются непрерывными функциями. А значит, исходная задача типа Коши (2.1), (2.2) имеет единственное непрерывное решение. □

Если не выполняется первое условие утверждения 2.1 и пучок $\lambda A+B$ не является регулярным, то задача (2.1), (2.2) не будет однозначно разрешимой. В этом случае рассматриваемая задача типа Коши может иметь или бесконечное множество решений, или вовсе не иметь решений.

Если же не выполняется второе условие утверждения 2.1, то единственное непрерывное решение все же может существовать. Это связано с тем, что условия утверждения 1.2 только достаточны для $\underbrace{D^\alpha\cdots D^\alpha}_{k}f(t)\in C_{[0,T]}$, а также с тем, что неизвестны размерности N_k блоков в преобразовании пучка матриц (см. теорему 1.1). Рассмотрим иллюстрирующий пример.

Пример 2.1. Пусть $\alpha\in(0,1)$. Рассмотрим ДАУ

$$D^\alpha\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{2t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\\2+\frac{3t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\\3\end{pmatrix},\quad t\in[0,1].$$

Индекс матричного пучка $\lambda A+B$ равен 3. Второе условие утверждения 2.1 не выполняется при любом значении $\alpha\in(0,1)$. Несмотря на это, рассматриваемая система имеет единственное непрерывное решение $u_1(t)=1$, $u_2(t)=2$, $u_3(t)=3$.

Для того, чтобы решение задачи типа Коши (2.1), (2.2) было непрерывным, необходимо выполнение третьего условия утверждения 2.1. Покажем это. Пусть $u(t) \in C_{[0,1]}$, обозначим $m = \max_{t\in[0,1]} ||Au(t)||_{\mathbb{R}^n}$, тогда справедлива цепочка неравенств

$$||D^{\alpha-1}\left(Au(t)\right)||_{\mathbb{R}^n} = ||I^{1-\alpha}\left(Au(t)\right)||_{\mathbb{R}^n} \leq I^{1-\alpha}||Au(t)||_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{m\cdot t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

Выражение в правой части стремится к нулю при $t \to +0$, т. е. начальное условие рассматриваемой задачи типа Коши, заданное в (2.2), при поиске ее непрерывного решения на отрезке $[0,1]$ имеет вид

$$D^{\alpha-1}\left(Au(t)\right)\Big|_{t\to+0} = 0.$$

В следующем разделе мы анонсируем численный метод решения рассматриваемого класса задач.

3. Численный метод

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = 1, \cdots, N,\ h = \frac{1}{N},$$

введем обозначение $v_i = v(t_i)$ для некоторой функции $v = v(t)$, получим соотношения

$$\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}v(s)ds = \sum_{j=1}^{i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t_i-s)^{\alpha-1}v(s)ds \approx \sum_{j=1}^{i}v_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t_i-s)^{\alpha-1}ds = \sum_{j=1}^{i}\frac{h^\alpha}{\alpha}\omega_{i,j}v_j.$$

Эта формула получена с использованием квадратурной формулы правых прямоугольников и метода интегрирования произведений [10], в которой веса квадратурной формулы имеют вид

$$\omega_{i,j} = \left((i-j+1)^\alpha - (i-j)^\alpha\right).$$

Таким образом численный метод для интегрального представления (2.3), с учетом обозначений $f_i = f(t_i)$, $u_i \approx u(t_i)$, имеет вид

$$Au_i + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{j=1}^{i}\omega_{i,j}Bu_j = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{j=1}^{i}\omega_{i,j}f_j. \tag{3.1}$$

Для стандартных ДАУ ($\alpha = 1$) вида

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t),$$

предложенный алгоритм полностью совпадает с неявной схемой Эйлера. В этом случае (см. [11]) получена оценка $\|x_i - x(t_i)\|_{R^n} = O(h)$ при $i \geq r$, а в первых $r-1$ точках сходимости не наблюдается, здесь r индекс матричного пучка системы.

4. Численный эксперимент

Предложенный алгоритм (3.1) проверен на тестовых ДАУ, для которых значения параметра дифференцирования α выбраны произвольно.

Пример 4.1. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Рассмотрим ДАУ с постоянными матрицами коэффициентов

$$D^{\alpha}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+t^2\\ \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+t^2+t^3\end{pmatrix},\quad t\in(0,1].$$

Индекс матричного пучка системы равен 2. Задача типа Коши для этого ДАУ при нулевом начальном значении удовлетворяет условиям утверждения 2.1. Точное решение имеет вид $u_1(t)=t^2$, $u_2(t)=t^3$. В таблице 1 приведены максимальные погрешности по евклидовой норме при различных значениях шага h.

Таблица 1

Расчеты примера 4.1

h	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.95$
0.2	0.0340	0.1645	0.3169	0.4521	0.5411
0.1	0.0210	0.0975	0.1781	0.2422	0.2818
0.05	0.0126	0.0556	0.0962	0.1259	0.1437
0.025	0.0073	0.0307	0.0506	0.0643	0.0726

Здесь, при уменьшении шага в два раза, значение погрешности уменьшается также в два раза, что говорит о том, что порядок метода (3.1) равен 1.

Пример 4.2. Рассмотрим при $\alpha \in (0,1)$ ДАУ

$$D^{\alpha}\left(N_3 u(t)\right)+\mathbb{E}_3 u(t)=f(t),\quad t\in(0,1],$$

где $f(t)=(0,0,t^2)$. Точное решение $u(t)=\left(\frac{2t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)},\frac{-2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)},t^2\right)$.

С помощью алгоритма (3.1), найдем приближенное значение решения в первой точке

$$u_1=\left(h^{2-3\alpha}\Gamma^3(1+\alpha),-h^{2-2\alpha}\Gamma^2(1+\alpha),h^{2-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\right).$$

Первая компонента этого представления содержит множитель $h^{2-3\alpha}$. При $\alpha \le \frac{2}{3}$ алгоритм дает результат, аналогичный результатам расчета примера 4.1. При $\alpha > \frac{2}{3}$ в первых точках приближенных значений первой компоненты решения наблюдается всплеск, что продемонстрировано на рис. 1., где изображены графики погрешностей первой компоненты при $\alpha = 0.95$, при различных значениях шага.

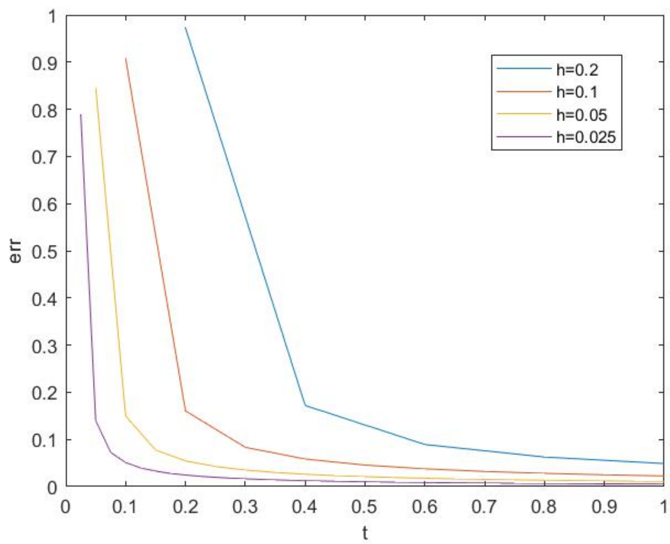

Рис. 1. Значения погрешностей первой компоненты

На графике видно, что в первой точке погрешность максимальна и, если судить по первым значениям, метод имеет порядок $O(1)$. Но при некотором отступе от первых значений погрешности уменьшаются вдвое с уменьшением шага в два раза.

П р и м е р 4.3. Рассмотрим ДАУ с постоянными матрицами коэффициентов

$$D^{\alpha}\left(Au(t)\right) + Bu(t) = f(t), \;\; t \in (0,1], \;\; \alpha \in (0,1),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \mathbb{E}_4, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^{4.2} \\ 4t^2 \\ t+8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Индекс матричного пучка $\lambda A + B$ равен 2. Второе условие утверждения 2.1 не выполняется, а именно $f(0) \neq 0$. Несмотря на это, система имеет единственное непрерывное решение

$$u(t) = \left(\frac{\Gamma(5.2)t^{4.2-\alpha}}{\Gamma(5.2-\alpha)} + t^{4.2},\, 4t^2,\, \frac{8t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + t + 8,\, 1\right).$$

В таблице 2 приведены максимальные погрешности по евклидовой норме при различных значениях шага h, найденные с помощью алгоритма (3.1).

Таблица 2

Расчеты примера 4.2

h	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.95$
0.2	0.0340	0.1645	0.3169	0.4521	0.5411
0.1	0.0210	0.0975	0.1781	0.2422	0.2818
0.05	0.0126	0.0556	0.0962	0.1259	0.1437
0.025	0.0073	0.0307	0.0506	0.0643	0.0726

Так как погрешности при уменьшении шага в два раза, уменьшаются вдвое, можно говорить о его эффективности. Таким образом, алгоритм демонстрирует сходимость на ДАУ дробного порядка, которые могут не удовлетворять второму условию утверждения 2.1, но имеющих единственное непрерывное решение.

Заключение

В данной статье сформулированы достаточные условия разрешимости линейных ДАУ с производной Римана–Лиувилля дробного порядка $\alpha \in (0,1)$. Анонсирован численный метод решения таких задач, основанный на интегральном представлении исходного ДАУ, квадратурной формуле правых прямоугольников и методе интегрирования произведений. Приведены результаты численных расчетов модельных примеров, которые имеют различный индекс матричного пучка. Данные расчеты подтвердили работоспособность предложенного подхода. В дальнейшем планируется обосновать данный алгоритм для различных α и матричных пучков $\lambda A + B$, имеющих высокий индекс, а также построить многошаговые методы решения ДАУ дробного порядка.

References

[1] В. Е. Тарасов, *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка*, Ижевский институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2011, 568 с. [V. E. Tarasov, *Models of Theoretical Physics with Fractional Integro-Derivation*, Izhevsk Institute of Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2011 (In Russian), 568 pp.]

[2] В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 510 с. [V. V. Uchaikin, *Fractional Derivative Method*, Artichoke, Ulyanovsk, 2008 (In Russian), 510 pp.]

[3] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. [S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications*, Nauka i tekhnika Publ., Minsk, 1987 (In Russian), 688 pp.]

[4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science Publishing, Amsterdam–Boston–Heidelberg, 2006, 541 pp.

[5] Ю. Е. Бояринцев, *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Сиб. отд-ние, 1980. [Yu. E. Boyarintsev, *Regular and Singular Systems of Linear Ordinary Differential Equations*, Nauka Publ., Sib. Department, 1980 (In Russian)].

[6] В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск, 1996, 280 с. [V. F. Chistyakov, *Algebraic Differential Operators with Finite-Dimensional Kernel*, Nauka Publ., Novosibirsk, 1996 (In Russian), 280 pp.]

[7] V. Mehrmann, C. Shi, “Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order”, *Numerical Algorithms*, **42** (2006), 281–307.

[8] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1986, 576 с. [F. R. Gantmakher, *Matrix Theory*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russian), 576 pp.]

[9] А. Д. Полянин, А. В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям*, Физматлит, 2003. [A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, Fizmatlit Publ., 2003 (In Russian)].

[10] R. Weiss, “Product integration for the generalized Abel equation”, *Mathematics of Computation*, **26**:117 (1972), 177–190.

[11] Ю. Е. Бояринцев, В. М. Корсуков, “Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Вопросы прикладной математики*, 1975, 140–152. [Yu. E. Boyarintsev, V. M. Korsukov, “Application of difference methods to the solution of regular systems of ordinary differential equations”, *Issues of Applied Mathematics*, 1975, 140–152 (In Russian)].

Информация об авторах

Булатов Михаил Валерьянович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация.
E-mail: mvbul@icc.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7952-5560

Индуцкая Татьяна Сергеевна, аспирант, лаборатория дифференциальных уравнений и управляемых систем. Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация.
E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5290-9887

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Индуцкая Татьяна Сергеевна
E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 28.02.2023 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the authors

Bulatov Mikhail Valeryanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher. Institute of System Dynamics and Control Theory named after V. M. Matrosov SB RAS, Irkutsk, Russian Federation.
E-mail: mvbul@icc.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7952-5560

Indutskaya Tatyana Sergeevna, Post-Graduate Student, Laboratory of Differential Equations and Control Systems. Institute of System Dynamics and Control Theory named after V. M. Matrosov SB RAS, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5290-9887

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Tatyana S. Indutskaya
E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

Received 25.01.2023
Reviewed 28.02.2023
Accepted for press 10.03.2023